VII

1. $\left||x-20|-10\right|=2010$

Имамо да је $|x-20|-10=2010$ или $|x-20|-10=-2010$. Друга једначина нема решења, а решења прве су $x_1=2040$ и $x_2=-2000$.

2. Јасно је да је $a\neq 0$ и $b\neq 0$, па слиједи да је $c=0$. Тада имамо да је

$$\frac{a\cdot a\cdot(-b)\cdot a}{b}>0$$

тј.

$$-(a\cdot a\cdot a)>0$$

па је $a<0$, одакле слиједи да је $b>0$.

3. $a+b=180^{\circ}$

$\frac{3}{5}a+\frac{2}{5}a+b=180^{\circ}$

$\frac{3}{5}a+90^{\circ}=180^{\circ}$

$a=150^{\circ}$, па је $b=30^{\circ}$.

4. Уочимо сљедећа растављања броја 210 на чиниоце.

$$210=1\cdot 5\cdot 6\cdot 7 \qquad 210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \qquad 210=5\cdot 6\cdot 7$$

У првом случају имамо бројеве $1567, 1576, 1657, 1675, 1756, 1765$,
у другом случају $2357, 2375, 2537, 2573, 2735, 2753$,
а у трећем $567, 576, 657, 675, 756, 765$. Дакле укупно 18 бројева.

5. Претпоставимо супротно да су сви дечаци добили различит број кликера.
Тада је најмањи могући број кликера

$$0+1+2+\cdots+63=2016>2010$$. Контрадикција.

VIII

1. Непосредно се увјеравамо да ако природан број n при дјељењу са 4 даје остатак 2 онда се производ n тројки завршава цифром 9. Зато се производ 2010 тројки завршава са 9.

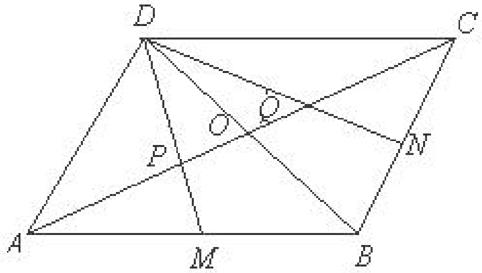
2. Нека $d\,|5k+6,\ \ d\,|8k+7,\ \ d\,|6k+5$. Тада

$$d\,|6(5k+6)-5(6k+5)\quad \text{тј.}\quad d\,|11$$

$$d\,|8(5k+6)-5(8k+7)\quad \text{тј.}\quad d\,|13$$

па је једини заједнички дјељитељ за ове бројеве број 1.

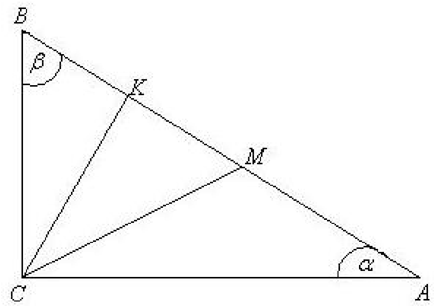
3.



Нека је O пресјек дијагонала овог паралелограма.
У ΔABD, AO и DM су тежишне дужи, па је њихова пресјечна тачка P тежиште тог троугла.
Зато је $|AP|=\frac{2}{3}|AO|=\frac{1}{3}|AC|$.

Слично, у ΔBCD, $|CQ|=\frac{1}{3}|AC|$, а одатле слиједи да је и $|PQ|=\frac{1}{3}|AC|$ што је и требало доказати.

4.



$$\angle KCA=\frac{180^\circ-a}{2}=90^\circ-\frac{a}{2}$$

$$\angle BCM=\frac{180^\circ-b}{2}=90^\circ-\frac{b}{2}$$

$$\angle KCA\neq\angle BCM=\angle KCA+\angle ACM+$$

$$+\angle BCK+\angle KCM=90^\circ+\angle KCM$$

С друге стране је

$$\angle KCA+\angle BCM=\left(90^\circ-\frac{a}{2}\right)+\left(90^\circ-\frac{b}{2}\right)=180^\circ-\frac{a+b}{2}=135^\circ$$

па је

$$\angle KCM=45^\circ.$$

5. Претпоставимо супротно да су сви дечаци добили различит број кликера. Тада је најмањи могући број кликера

$0+1+2+\text{L}\ +63=2016>2010$. Контрадикција.

IX

1. $p-1$ и $p+1$ су парни бројеви. Уз то један је дјељив са 4. Значи, производ је дјељив са 8. пошто су $p-1$, p, $p+1$ три узастопна природна броја онда је $(p-1)\cdot p\cdot(p+1)$ дјељив са 3, па је $(p-1)\cdot p\cdot(p+1)$ дјељиво са 24.

2. Нека $d\,|5k+6,\ \ d\,|8k+7,\ \ d\,|6k+5$. Тада

$$d\,|6(5k+6)-5(6k+5) \quad \text{тј.} \quad d\,|11$$

$$d\,|8(5k+6)-5(8k+7) \quad \text{тј.} \quad d\,|13$$

па је једини заједнички дјељитељ за ове бројеве број 1.

3. Пресјек ACD' је једнакостранични троугао чија је страница дијагонала бочне стране *d*. Зато је:

$$\frac{d^2\sqrt{3}}{4}=18\sqrt{3}cm^2$$

па је

$$d=6\sqrt{2}cm,$$

одакле је

$$a=6cm,$$

па је

$$P=216cm^2,\ \ V=216cm^3.$$

4.

$\angle BAS\cong\angle ADB$ (као периферијски углови над подударним тетивама)
$\angle ABS\cong\angle ABD$, па је $\Delta ABS\sim\Delta DBA$ одакле је
$|AB|:|BD|=|BS|:|AB|$ па је $|BD|=9cm$.

5. Претпоставимо супротно да су сви дечаци добили различит број кликера. Тада је најмањи могући број кликера

$0+1+2+\cdots+63=2016>2010$. Контрадикција.