8. ЈУНИОРСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ
Пале, 29.05.2010. год.

1. Доказати да је број $2^{2008} \cdot 2^{2010} + 5^{2012}$ сложен.

Рјешење:

$$\begin{aligned} &2^{2008} \cdot 2^{2010} + 5^{2012} \\ &\quad = (2^{2009})^2 + 2 \cdot 2^{2009} \cdot 5^{1006} + (5^{1006})^2 - 2 \cdot 2^{2009} \cdot 5^{1006} \\ &\quad = (2^{2009} + 5^{1006})^2 - (2^{1005} \cdot 5^{503})^2 \\ &\quad = (2^{2009} + 5^{1006} + 2^{1005} \cdot 5^{503})(2^{2009} + 5^{1006} - 2^{1005} \cdot 5^{503}). \end{aligned}$$

Јасно је да је $2^{2009} + 5^{1006} + 2^{1005} \cdot 5^{503} > 1$. Лако се покаже да је

$$2^{2009} + 5^{1006} - 2^{1005} \cdot 5^{503} \equiv 2(mod 5).$$

2. Посматрајмо све полиноме трећег степена $P(x)$ са коефицијентима из скупа N_0 који задовољавају услов $P(1) = 20$. Међу њима одредити полином за којег се достиже:
а) минимална вриједност израза $P(4)$,
б) максимална вриједност израза $P(3)/P(2)$.

Рјешење:

Означимо тај полином $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$. Из $P(1) = 20$ добијамо релацију $a + b + c + d = 20$.
Сада, $P(4) = 64a + 16b + 4c + d = (a + b + c + d) + 63a + 15b + 3c = 20 + 63a + 15b + 3c$.
Како је a барем 1, јасно је да се минимум достиже кад је $a = 1, b = 0, c = 0, d = 19$ и та минимална вриједност је $P(4) = 83$ и достиже се за полином $P(x) = x^3 + 19$.

На сличан начин добијамо $P(3) = 27a + 9b + 3c + d$ те $P(2) = 8a + 4b + 2c + d$. Ставимо да је $\frac{27a+9b+3c+d}{8a+4b+2c+d} \leq L$ одакле трансформацијом добијамо

$$(27 - 8L)a + (9 - 4L)b + (3 - 2L)c + (1 - L)d \leq 0(*).$$

Из ненегативности коефицијената a, b, c, d јасно је да ће за $L \geq 27/8, L \geq 9/4, L \geq 3/2, L \geq 1$, односно $L \geq 27/8$ увијек бити испуњен услов$(*)$.
Покажимо да је $L = 27/8$ максимална вриједност траженог израза. Посматрајмо полином $P(x) = 20x^3$. За њега је вриједност $P(3)/P(2) = 27/8$.

3. Тачке M и N су дате на страницама AD и BC ромба $ABCD$ редом. Права MC сијече дуж BD у T, права MN дуж BD у U, права CU сијече страницу AB у Q, а права QT сијече страницу CD у P. Доказати да троуглови QCP и MCN имају једнаке површине.

   Рјешење:

   Удаљености тачке M од праве BC и тачке Q од праве DC су једнаке, јер је $ABCD$ ромб. Стога је довољно показати да је $CP = CN$, односно $DP = BN$.

   Користећи Талесову теорему имамо да вриједи $\frac{BU}{UD} = \frac{QU}{UC} = \frac{NU}{UM}$, што даје $NQ \parallel MC$ и аналогно $MP \parallel CQ$.

   Сада су троуглови MDP и BQC слични (три једнака угла), па вриједи

$$\frac{DP}{BQ} = \frac{MD}{BC} = \frac{DT}{BT}$$

   На сличан начин се добија да је и $\frac{BN}{MD} = \frac{BQ}{DC}$, а отуда слиједи $\frac{DP}{MD} = \frac{BN}{MD}$ односно $DP = BN$, што даје тражену тврдњу.

4. На кружници су у смјеру кретања казаљке на сату написани сви природни бројеви од 1 до 2010. Прецртајмо најприје број 1, затим број 10, па 19, и тако редом сваки девети број у истом смијеру. Који ће број први бити прецртан два пута? Колико је бројева у том тренутку још непрецртано?

   Рјешење:

   Како је $2010 = 9 \cdot 223 + 3$ то ће у првом обиласку бити прецртани бројеви
   $1 = 0 \cdot 9 + 1$, $10 = 1 \cdot 9 + 1, ..., 2008 = 223 \cdot 9 + 1$.
   У сљедећем обилажењу ће бити прецртани бројеви
   $7 = 0 \cdot 9 + 7$, $16 = 1 \cdot 9 + 7, ..., 2005 = 222 \cdot 9 + 7$.
   У трећем обилажењу ће бити прецртани
   $4 = 0 \cdot 9 + 4$, $13 = 1 \cdot 9 + 4, ..., 2002 = 222 \cdot 9 + 4$.
   У четвртом обилажењу ћемо прво морати прецртати број 1 и то ће бити први поново прецртани број.
   Укупно смо прецртали $224 + 223 + 223 = 670$ бројева. Према томе, непрецртаних бројева је остало $2010 - 670 = 1340$.